國立臺灣大學物理學系107學年度個人申請入學考試 2018/04/14

數學試題

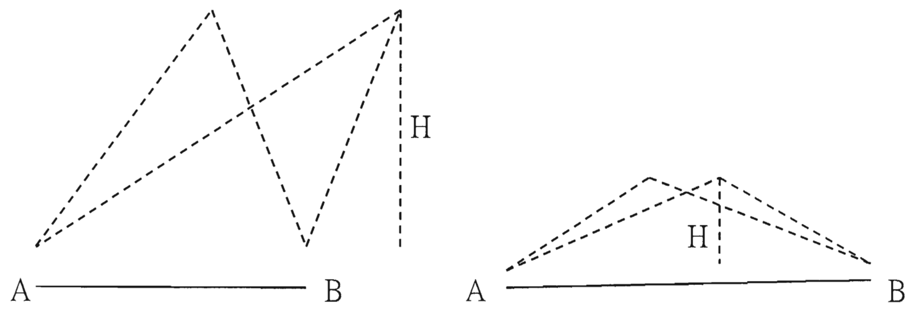
一共四題,答案請務必寫在試卷紙上，並請標明題號，試題隨卷繳回

1. 一函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，而 a、b、c 為實數，且 $|f(1)|\le 1$，$|f(0)|\le 1$，$|f(-1)|\le 1$。試由下列過程證明：如果 $x\in[-1,1]$，則 $|f(x)|\le 5/4$。

（a）假設 $a>0$，大略畫出 $f(x)$ 的函數圖形，找出 $f(x)$ 的極小點 $x=x_m$，討論 $|x_m|>1$ 的情形。 (8 分)

（b）討論 $|x_m|\le 1$ 的情形。(12 分)

2. 同面積且共用一邊 AB 的許多三角形中，三個高的乘積為最大的條件是什麼？要考慮 AB 長度和 AB 邊上高 H 的長度的相對關係對答案的影響。(15 分)



3. veni vidi vici 是古羅馬凱撒大將給元老院的捷報，意思是：我來 我見 我征服，(這也應該是歷史上最簡潔的戰報)。

（a）這十二個字母有幾種排列的方式？寫出階乘的型式即可。(5 分)

（b）字母 i 不相連的排列的方式有幾種？寫出階乘的型式即可。(5 分)

（c）把這十二個字母分別寫在十二張卡片上，把卡片放在袋子裏，一次抽取一張，不要放回去，如果第二次抽到 i，那第三次抽到 v 的機率是多少？(5 分)

4. 設複數 z=x+iy, x, y 為任意實數, 且已知尤拉公式為:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\exp(i\theta), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

複數平面上的一組莫比烏斯變換(Mobius Transformation) 是由四個複數常數 a,b,c,d 和以下的函數關係來定義：

$$z \to f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0$$

A. 請寫下來所對應到, 作用在 z*=x-iy 上的莫比烏斯變換. (2 分)

B. 請說明我們如何可以利用莫比烏斯變換對複數平面再加上∞中的任一點 z 作出下列變化：
1.平移 2.依原點旋轉 3.尺度放大縮小 4.倒置 z --> 1/z (8 分)

C. 請證明在複數平面上, 任何一組莫比烏斯變換, 都有兩個不變點滿足 z = f(z), 並用 a, b, c, d 寫出他們的位置. (7 分)

D. 請找出能把複數平面上任意三點 (z1, z2, z3) 同時變換到 (0, 1, ∞) 的一組莫比烏斯變換. (6 分)

E. 請找出在複數平面上, 我們至少需要多少個不同的任意點 z1, z2, z3…zk 才能夠組合出莫比烏斯不變量: g(f(z1), f(z2), f(z3)…, f(zk)) = g(z1, z2, z3…,zk) ? (3 分)
針對你找出最小的 k, 請寫下所對應的莫比烏斯不變量, 並證明它在莫比烏斯變換下不會改變. (3+6 分)

F. 請找出下列莫比烏斯變換:

$$z \to f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

作用在 1.實數軸 2.上半複數平面 (z=x+iy, y>0) 所形成的圖形. （15 分）