110學年度物理系學士班「個人申請」入學第二階段招生考試

【數學試題】

【本考科禁止使用計算機】

答案請務必寫在試卷本上，標明題號，並寫出演算過程及文字解釋。每題配分標於題末。

試題隨卷繳回。

1. 函數 $x(t)$ 滿足：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

β 和 ω_0 為常數，且 $\beta \geq 0,\ \omega_0>0$。

(a) 假設 $\beta=0$ ，證明 $x(t)=A\sin(\omega_0 t-B)$ 滿足上述微分方程，其中 A、B 為任意常數。 **(4分)**

(b) 假設 $\beta>\omega_0$ ，證明 $x(t)=e^{-\beta t}[Ce^{\omega_1 t}+De^{-\omega_1 t}]$ 滿足上述微分方程，其中 $\omega_1=(\beta^2-\omega_0^2)^{1/2}$，$C$、$D$ 為任意常數，$e=2.71828\cdots$ 為自然指數。 **(4分)**

(c) 假設 $\beta<\omega_0$ 且 $\beta\neq 0$，請問 $x(t)$ 的解為何？ **(5分)**

提示：$e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$

(d) 接下來讓我們實際代入數字。假設 $\omega_0=2$，且在 $t=0$ 時 $x=1,\ dx/dt=0$，請分別寫下 $x(t)$ 在下述三種情形下的解：$\beta=0,\ \ \beta=1,\ \ \beta=2\sqrt{2}$。 **(6分)**

(e) 請分別描繪 $x(t)$ 在題(d)三種情形下的 $x-t$ 曲線圖，並描述三者對應到簡諧運動時的物理性質差異。 **(6分)**

2. 函數 $y(x)$ 滿足：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+k(k+1)y=0$$

其中 k 為非負整數之常數。請回答下列問題。（註：各小題將獨立計分。例如，即使題(a)答錯或空白，並不會影響其它小題的計分。）

(a) 利用代入級數解 $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\Sigma_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，證明 a_n 滿足

$$a_{n+2}=-\frac{(k-n)(k+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$ ，對任意非負整數 n 皆成立 **(6分)**

(b) 由題(a)可得 $y(x)$ 的兩組級數解 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$，分別為

$$g_k(x) = a_0\left[1 - \frac{k(k+1)}{2!}x^2 + \frac{k(k+1)(k-2)(k+3)}{4!}x^4 - \cdots\right]$$

$$h_k(x) = a_1\left[x - \frac{(k-1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)}{5!}x^5 - \cdots\right]$$

（註：$k! = k(k-1)(k-2)\cdots 1$）

請證明數列 $h_0(1)$ 發散。（8分）

(c) 定義 $P_k(x)$ 如下：

$$P_k(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{if k is even} \\ h_k(x) & \text{if k is odd} \end{cases}$$ （註：even 偶數，odd 奇數）

並要求 $P_k(1) = 1$ (藉由選取 a_0 和 a_1) 。請證明 $2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x)$。（3分）

(d) 由題(c)的結果可推廣至 $(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)$（註：不需證明此式）。請利用此關係式和數學歸納法，證明 $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ 對任意非負整數 k 皆成立。（8分）

3. 適當選取數對(a, b)可使拋物線$y = x^2 + ax + a - b^2$與x軸相切或無交點。設D為所有此種數對(a, b)在平面上所對應的點所構成的集合。試問：

(a) 寫下集合D的條件，並描述其邊界是何種圖形?（10分）

(b) $2a - 3b$在集合D上，所得之最大值與最小值分別為何?（10分）

4. 設函數$f(x)$為一可微分函數，P為$y = f(x)$圖形上距離某點$Q(x_0, y_0)$最近的一點。

(a) 若P點的x坐標為a，試證$a + f(a)f'(a) = x_0 + y_0 f'(a)$。（10分）

(b) 利用上一小題，計算$y = 2x + 5$與原點之距離。（5分）

5. 一袋子中有六顆白球、若干顆黑球。已知從袋中一次取出兩顆球同為白色的機率是$\frac{1}{3}$。

(a) 請問袋中有幾顆黑球？（5分）

(b) 將所有球放回袋中。從袋中一次取出三顆球，其中至少有一顆是黑球之機率為何？（5分）

(c) 將所有球放回袋中。從袋中分次取出三顆球，取出即放回，得到至少一顆黑球之機率為何？（5分）