

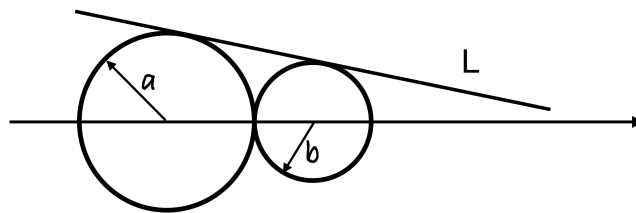
114 學年度物理系學士班「個人申請」入學第二階段招生考試

【數學試題】

【本考科不可使用計算機】

答案請務必寫在試卷本上，並請標明題號，試題隨卷繳回

1. (5%)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2^x + 3^x}{\sin(x^x) + x^3 + (1 - 2^{-x/2})3^x} = ?$
2. (5%) 請將  $\cos(2 \cos^{-1}(x))$  化簡為  $x$  的多項式。
3. (8%) 請將函數  $f(x) = x^4 + 1$  因式分解為兩個實係數二次多項式的乘積。
4. (8%)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = ?$
5. (8%) 給定實數  $m, n$ ，若  $\log_m(\log_n(e^x)) + \log_n(\log_m(e^x)) = 1$ ，求  $x = ?$
6. (8%) 數列  $x_n$  的定義為  $x_1 = a < 0$ ， $x_2 = b < 0$ ， $x_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-2}})$ ，假設極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在，其值為何？
7. (8%) 如圖，在平面上外切的兩圓半徑為  $a, b$  且  $a > b$ 。求與兩圓同時相切的直線  $L$  之斜率。



8. (5%) 請給出  $\sum_{k=0}^{10} C_k^{10}$  . 在這裡  $C_k^n = \binom{n}{k}$
9. (10%) 請給出  $\sum_{k=0}^n k^2 C_k^n$
10. 如果  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$  請給出
  - 10.1 (2%)  $\frac{de^x}{dx} = ?$
  - 10.2 我們定義一個積分函數

$$f(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$$

10.2.A (3%) 請問  $f(1) = ?$

10.2.B (10%) 請證明如果  $y$  是正整數，則  $yf(y) = f(y+1)$

11. 當我們在做座標旋轉的時候向量的長度不變。旋轉後的向量  $\vec{V}'$  跟旋轉前的向量  $\vec{V}$  的關係寫作  $\vec{V}' = M\vec{V}$

11.1 (2%) 如果  $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  那  $M$  是幾乘幾的矩陣?

11.2 (5%) 如果  $M$  是個旋轉矩陣  $M$  要滿足什麼方程式 (提示 你會需要用到矩陣轉置  $M^T$  也就是將矩陣行與列交換)

11.3 (5%) 請寫下以  $z$  為軸心，旋轉  $\theta$  角的矩陣為何? (給出順或逆時針均可)

11.4 (8%) 今天假如有個四維向量， $\vec{V} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  他的長度平方定義為  $-t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ，則保有這個長度不變的旋轉矩陣滿足什麼方程式 (8 pts)

試題隨卷繳回