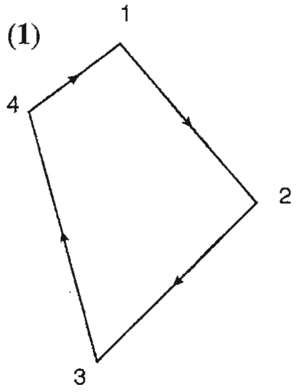
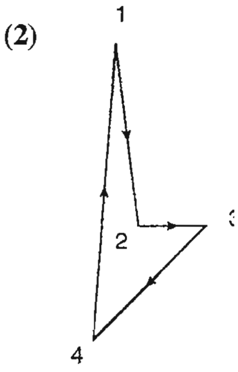
國立臺灣大學物理學系 106 學年度**個人申請入學**考試 2017/03/25

數 學 試 題

一共四題, 答案請務必寫在試卷紙上，並請標明題號，試題隨卷繳回

1. 一個平面上有四個點，其座標依序為 (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)。我們若將四個點依序連起來我們會得到一個四邊形。這四邊形有可能是一個凸多邊形，如下圖(1)，或凹多邊形，如下圖 (2)





請問這四點必須滿足什麼條件才能確保會連出一個凸多邊形 ？(提示：用外積) (10 分)

請給出一組六個點的座標，使得依序連起來會是凸多邊形。(5 分)

現在給你第七個點 (x_7, y_7), 請給出這個點座落於以上凸多邊形內部的必要條件。(15 分)

2. 當我們展開 $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots + x_{20})^{622}$ 時我們會得到一個多項式的和

請問$(x_1)^{200}(x_{17})^{100}(x_{19})^{150}(x_7)^{172}$ 的係數是多少？(用表示式即可，不需展開) (10 分)

請將$(2)^{20}$ 以對稱的整數數列的和表示。(所謂對稱整數數列是指如：

17+19+23+19+17

3+6+9+12+15+15+12+9+6+3）(10 分)

3. 請考慮二維平面上，直角坐標為 (x, y) 的任一點，對著原點以逆時鐘方向旋轉 θ 角度，來推導出來代表二維空間旋轉的 2x2 矩陣. (5 分)

請運用推導出來的 2x2 矩陣，運用矩陣相乘推導出：

$$\cos(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3), \quad \sin(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)$$

為何？(10 分)

假設二維平面上有某個形容兩個物體交互作用的物理量 $F(\mathbf{X1}, \mathbf{X2})$，它是兩個物體的坐標 $\mathbf{X1} = (x1, y1)$ 和 $\mathbf{X2} = (x2, y2)$ 的函數.

如果 $F(\mathbf{X1}, \mathbf{X2})$ 在兩物體同時對著直角坐標原點“平移”同一距離或是“旋轉”同一角度時都不改變，請寫下 $F(\mathbf{X1}, \mathbf{X2})$ 的最廣義型式，並說明你的理由. (7 分)

最後假如當我們改變空間尺度，把 $\mathbf{X1}$ 和 $\mathbf{X2}$ 變成 $\lambda\mathbf{X1}$ 和 $\lambda\mathbf{X2}$ 時，

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{X1}, \lambda\mathbf{X2}) = \lambda^{-\Delta_1 - \Delta_2}\mathbf{F}(\mathbf{X1}, \mathbf{X2})$$

λ 是某一實數，請寫下 $F(\mathbf{X1}, \mathbf{X2})$ 的型式. (3 分)

4. 假設某非常數函數 f(x) 具有下列週期性質:

$$f(x) = f(x+2\pi)$$

請以你所學過的的基本函數，舉兩個 f(x) 的不同例子且示範他們的週期性質. (5 分)

假設我們現在有無限多個滿足這樣週期性質的不同函數:

$$f_n(x) = f_n(x+2\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

運用這些函數，我們可以來定義出一個無限維度的『函數空間』上的垂直單位向量，而且如向量空間般，我們可以定義它們之間的內積 (,) 為:

$$(f_m(x), f_n(x)) = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = 1,\ m = n; \quad \delta_{mn} = 0,\ m \neq n.$$

目前你可以先把內積當成某個抽象的計算動作，但是這個動作的定義必須同時滿足以下條件：

$$(\alpha f_m(x), \beta f_n(x)) = \alpha\beta(f_m(x), f_n(x)), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$
$$(f_m(x), f_n(x) + f_{n'}(x)) = (f_m(x), f_n(x)) + (f_m(x), f_{n'}(x)).$$

假設現在有一函數 Q(x) 可以被寫成以下型式：

$$Q(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n f_n(x)$$

請運用剛才定義的內積 (,) 寫下來這裡的常數系數 A_n? (5 分)

現在假設已知函數 fn(x) 和其內積 (,),

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (f_n(x), f_m(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dx e^{i(m-n)x}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

在 $-\pi \leq x \leq +\pi$ 範圍內，可以滿足上列週期性和內積性質.

請運用你對微積分的了解，來討論當 Q(x) 是 a. 奇函數 Q(-x) = -Q(x) 和 b. 偶函數 Q(-x)=+Q(x) 時，常數系數 An 該有什麼什麼性質? (15 分)
提示：請思考高中物理所學過的定波概念，及他們重疊時的現象.