

數學試題

答案請務必寫在試卷紙上，並請標明題號，試題隨卷繳回

1. 請求以下的和：

$$\sum_{r=1}^n Z^r = ? \quad Z \neq 1 \quad (2 \text{ 分})$$

假設 $Z = \cos x + i \sin x$, x 為實數, 請證明:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2}, \quad \sin \frac{x}{2} \neq 0 \quad (10 \text{ 分})$$

假設 $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, 請證明:

$$1. \quad Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2 \cos nx \quad (3 \text{ 分})$$

$$2. \quad \tan 5x = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}, \quad t = \tan x \quad (6 \text{ 分})$$

假設 $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$, 請求以下的值:

$$Z^{10} + \frac{1}{Z^{10}} = ? \quad (4 \text{ 分})$$

2. 假設 $f(r) = r^2(2r^2 - 1)$, 請證明:

$$f(r) - f(r-1) = (2r-1)^3 \quad (3 \text{ 分})$$

然後證明:

$$\sum_{r=n+1}^{2n} (2r-1)^3 = 3n^2(10n^2 - 1) \quad (5 \text{ 分})$$

請考慮 $\frac{2^{r+1}}{r+2} - \frac{2^r}{r+1}$ 的值, 然後找以下級數的值:

$$\sum_{r=1}^{30} \frac{r 2^r}{(r+1)(r+2)} = ? \quad (7 \text{ 分})$$

請把你的答案用 $2^n - 1$ 的形式來表示.

請利用數學歸納法或是其他方法證明以下式子:

$$S_n = \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad (8 \text{ 分})$$

假如 $1 - S_n < 10^{-5}$, 找出 n 的最小整數值. (2 分)

3. 我們現在要考慮各種路徑，規則是只能沿 45 度向上或向下走。請問如果在第八步回到地面有幾種走法（假設是正常人，不會穿越地板）(5 分)

如果是第 $2n$ 步回到地面請問有幾種走法 (10 分)

如果上題的答案用 C_n 表示，請證明它必然滿足以下的遞迴關係

$$C_{n+1} = \sum_{i=1}^n C_i C_{n-i}$$

在上式中 $C_0 = 1$ (10 分)

4. 在平面上有三個點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. 請問三個點圍成的三角形面積為何 (10 分)

三維空間有四個點 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$. 請問四個點圍成的立方體體積為何 (15 分)