

111 學年度物理系學士班「個人申請」入學第二階段招生考試

【數學試題】

【本考科禁止使用計算機】

答案請務必寫在試卷本上，並請標明題號，試題隨卷繳回。

- (5%) 請問 $\frac{10^{10^{10}}}{10^{10}}$ 最接近下面何者？(A) 10^{10} , (B) 10^{10^9} , (C) 10^{100} , (D) $10^{10^{10}}$ 。
- (5%) a 為不等於零的整數， b 為有理數， c 及 d 為無理數，以下何者正確？(多選) (A) ab 必為有理數，(B) ac 可能為有理數，(C) cd 可能為有理數，(D) $\sqrt{a}b$ 必為無理數。
- (5%) 二維平面上兩向量 v, w 滿足以下關係： $(v-w)$ 與 v 垂直， w 的長度是 $\sqrt{2}$ ， v 的長度是 1。請問 v 與 w 間之夾角為何？(可以用反三角函數表示。)
- (5%) 給定實數 $A, B > 0$ ，且 $A \neq B$ 。已知 x, y 滿足 $A^x B^y = A$, $A^x B^{-y} = B^{-1}$ ，求 x, y 的解。
- (5%) 函數 $f(x) = x^x$ 。已知另一函數 $g(x)$ 滿足 $f(f(g(x))) = x (\forall x)$ ，請問 $g(256) = ?$
- (5%) $\sum_{n=1}^N \cos(n\pi/N) = ?$ (N 為正整數。)
- (10%) 兩函數 $f(x) = x^2$, $g(x) = -4 + 4x - x^2$ 在二維平面上對應兩條曲線 $y = f(x)$ 及 $y = g(x)$ 。有一直線 $ax + by = 1$ 同時與兩曲線相切。請問 a, b 分別為何？
- (10%) 已知一實係數三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 有一根為 $1+i$ ，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 餘 3，又 $f(2) = 2$ 。請問 a, b, c, d 分別為何？
- (5%) 已知某流行病之普遍感染率為 $1/1000$ ，針對此流行病之快篩試劑的準確率為 95%。若某人用該快篩試劑得到陽性結果，請問其真的受到感染之機率為何？(請精確至兩位有效數字)
- (5%) 在複數平面上，已知 $z_1 = 12 - 5i$, $z_2 = iz_1$, $z_3 = iz_2$, $z_4 = iz_3$ 。試求以 $z_1 z_2 z_3 z_4$ 為頂點的四邊形面積。
- (5%) 在複數平面上，滿足 $|z-i| = 2|z|$ 的圖形離 $z=i$ 最近之距離為何？
- 假設已知對於所有正整數 n ，方程式 $x^3 - \frac{1}{n}x^2 + 2nx - 1 = 0$ 都恰有一個實根 r_n 。
 - (5%) 請證明 $0 < r_n < \frac{1}{n}$ 。
 - (5%) 請證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ 存在，並求其值。
- (10%) 取單位圆的上半部，以直徑為底做一內接梯形。請問其最大面積為何？
- (15%) 假定 $a \in \mathbb{R}$ ，請就 a 值討論方程組
$$\begin{cases} (a+1)x - 2y + 3z = 0 \\ x + (a-2)y + 3z = 2 \\ x - 2y + (a+3)z = 4 \end{cases}$$
 的解及其幾何意義，若有解需寫出其解。