數學試題

第一部分：

二維平面上的兩個直角坐標為 (x, y)，請你/妳運用對於複數平面的認知，來推導出對著原點 O，以逆時鐘方向旋轉 θ 角度旋轉的 2x2 矩陣為：(4 分)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

當考慮微小角度 $|\theta| << 1$ 時，請說明我們為什麼可以用下列式子來表示這樣的旋轉？(4 分)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \left\{ \mathbf{1}_{2\times 2} + i\theta \begin{pmatrix} 0, & +i \\ -i, & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

這裏 $\approx$ 表示近似，而大括號中第一個為 2x2 單位矩陣.

三維平面上的三個直角坐標為 (x, y, z)，而以 x-, y-, z-軸為旋轉軸逆時針方向旋轉的角度為：$\theta 1, \theta 2, \theta 3$. 說明為甚麼當 $|\theta 1| << 1$ 時，我們也可以用類似式子：(3+3 分)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \approx \{\mathbf{1}_{3\times 3} + i\theta_1 \mathbf{J}_x\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

來表示以 x-軸為旋轉軸的旋轉，並找出這裏的 3x3 矩陣 $\mathbf{J_x}$.

同樣當 $|\theta 2| << 1$ 或 $|\theta 3| << 1$ 時，請找出所對應的 3x3 矩陣 $\mathbf{J_y}$ 和 $\mathbf{J_z}$，**然後證明他們滿足以下式子：**(3+3+3+3+3 分)

$$\mathbf{J}_x\mathbf{J}_y - \mathbf{J}_y\mathbf{J}_x = i\mathbf{J}_z, \quad \mathbf{J}_y\mathbf{J}_z - \mathbf{J}_z\mathbf{J}_y = i\mathbf{J}_x, \quad \mathbf{J}_z\mathbf{J}_x - \mathbf{J}_x\mathbf{J}_z = i\mathbf{J}_y$$

請推導出來當 $\theta 1, \theta 2, \theta 3$，不只是微小角度時，分別對應到以 x-, y-, z-軸為旋轉軸逆時針方向旋轉的 3x3 旋轉矩陣：$\mathbf{R_x}$，$\mathbf{R_y}$ 和 $\mathbf{R_z}$. (3+3+3 分)

再來利用它們來表示，當我們以三維空間中任一單位向量 N **為旋轉軸旋轉任意角度時，所對應到的** 3x3 矩陣. (在這裡請以繪圖來幫助你的說明) (8 分)

請說明為什麼當一個任意向量 **V**，先以 x-軸旋轉 $\theta 1$，再以 y-軸旋轉 $\theta 2$，和先以

y-軸旋轉 θ 2,再以 x-軸旋轉 θ 1, 我們會得到不同的結果？ (4 分)

在解這個題目時, 你/妳可以自由運用以下的資訊：

1.尤拉複數公式 (Euler's Formula for complex number)為:

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

這裏 exp(iΘ)是自然指數.

2.自然指數的極限定義為:

$$\exp(i\theta) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + i\frac{\theta}{N}\right)^N$$

第二部分：

1. 一個連續函數 $f(x)$ 如果有 n 個實數根，請問它的斜率等於零的點最少有幾個？ (5 pts)

2. 一個函數 $f(x)$ 的斜率函數可用取極限的方式得到

斜率 $= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

故 $f(x) = x$ 的斜率是 1, $f(x) = x^2$ 的斜率是 $2x$, 請證明 $f(x) = x^n$ 的斜率是 nx^{n-1}. (10 pts)

3. 假設我們有一組任意不為零的實數 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，以下我們要用數學歸納法證明

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

對 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 而言不可能有不為零的實數解。

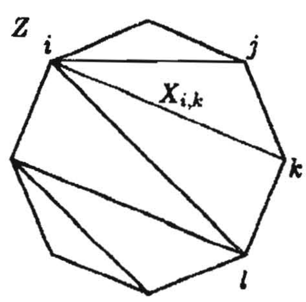
首先上式等同於在說，對於任意不為零的實數 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，

$$g_n(x) = c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n = 0$$

不可能有 n 個不為零的實數根。請用文字說明為什麼會有這樣的詮釋？(5 pt)
再來，我們看到 $g_1(x) = c_1x$ 的確沒有 1 個不為零的實數根。現在假設 $g_{n-1}(x)$ 最多只有 n-2 個不為零的實數根，但 $g_n(x)$ 卻有 n 個不為零的實數根，請證明這是矛盾的（提示：會用到第一，二題的答案）(20 pt)

既然是矛盾的，我們就可得到 $g_n(x)$ 不可能有 n 個不為零的實數根的結論。

4. 在一個凸多邊形裡，不斷將頂點用線連在一起，可以將之切割成多個三角形。如果要求所連的線不能相交的話，一個四邊形有兩種劃分法，而一個五邊形有五種劃分法。



請問 n 邊形有幾種切割法？為什麼？ (10 pt)

［試題請隨答案卷繳回］