國立臺灣大學物理學系109學年度個人申請入學考試 2020/04/18

數學試題

一共四題,答案請務必寫在試卷紙上，並請標明題號，試題隨卷繳回

(1) 令三維空間中通過原點 O 的三個直角坐標為 x_1,x_2,x_3.

請寫下分別以 x_1,x_2,x_3軸為旋轉軸, 逆時鐘旋轉角度 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$的三個 3×3矩陣: $R_i[\,\theta_i]$, i=1,2,3, 並證明它們滿足以下性質:**(6+3+3分)**

$$\det(R_i[\,\theta_i])=1\ , \qquad R_i^T[\theta_i]R_i[\,\theta_i]=1_{3\times3},\quad i=1,2,3. \tag{1}$$

這裏 det(A) 為任意矩陣A 的行列式, A^T為它的轉置矩陣, $1_{3\times3}$為三維單位矩陣.

請利用以上來証明三維空間中的任意旋轉矩陣R也滿足 (1) 裡同樣的性質, 並証明 R可以讓三維空間內的二維球面 S^2保持不變. **(3+4+4+4分)**

提示det(AB)=det(A)det(B), $(AB)^T=B^TA^T$,

半徑為l, 以原點為球心的二維球面方程式是: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=l^2$.

(2) 我們再來考慮滿足以下性質的2×2矩陣U :

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ :\ \det(U)=1,\ \ UU^\dagger=1_{2\times 2},\quad U^\dagger=\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \tag{2}$$

a,b,c,d皆為複數, a^*為a的共軛複數, $U^\dagger$稱為 U的赫米特共軛矩陣 (Hermitian Conjugate Matrix).

請證明任何滿足 (2) 所列性質的U也可以被改寫成以下形式：

$$U=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix},$$

α, β為兩個獨立的複數, 並且試著說明為何我們可以把所有滿足的U看成是一個三維的球面 S^3 . **(5+4分)**

考慮 α, β的實部和虛部, 請證明我們也可以用以下方式展開 U:

$$U = x_0 1_{2\times 2} + ix_1 \sigma_1 + ix_2 \sigma_2 + ix_3 \sigma_3$$

這裡$x_{0,1,2,3}$為四個任意實數, $\sigma_{1,2,3}$為三個你/妳要寫下來的2×2矩陣 **(2+6分)**.

最後請證明所寫下來的$\sigma_{1,2,3}$滿足下列關係式 **(6分)**:

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3,\quad \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = 2i\sigma_1,\quad \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 = 2i\sigma_2$$

這些矩陣叫"包立矩陣/Pauli Matrices", 在量子力學上用來形容電子的自旋.

(3) 給一個雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$

請問若直線 ax+by=1 與該雙曲線相切（交於一點）， a,b 需要滿足的必要條件為何？ **(5分)**

當直線 ax+by=1 與某曲線相切的必要條件為 $4a^2 + 9b^2 = 1$
該曲線的表示式為何？**(7分)**

假設 x,y 皆是單變數的函數，滿足 $x^2(t) - y^2(t) = 1$
並有級數表示式

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, t^i = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 + \cdots \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, t^i = b_0 + b_1\, t + b_2\, t^2 + b_3\, t^3 + \cdots \end{aligned}$$

請問 a_i b_i的解為何 (10 分)
提示：對 x^2-y^2=1 微分一次

$(x(0), y(0))$滿足x^2-y^2=1, 經過一個線性變換來到$(x(t_!), y(t_1))$

$$\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

既然 $(x(t_!), y(t_1))$ 也滿足 $x^2(t_1) - y^2(t_1) = 1$ 請問 a, b, c, d 必滿足什麼條件？**(10分)**

請問在 $(x(t_1), y(t_1))$ 這個點上與雙曲線相切的直線方程式為何？（請以 $x(t_1), y(t_1)$ 表示）**(10 分)**

(4) $C_n(x)$ 是一個n次的函數
$C_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_n x^n$
而$(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$ 為一系列的常數。$C_n(x)$滿足以下的遞迴關係
$C_n(x) = \frac{1}{n}[2x(n+3)C_{n-1}(x) - (n-6)C_{n-2}(x)]$
如果$C_0(x) = 1$, $C_1(x) = 8x$, 請證明 $C_n(1) > 0$ **(8 分)**