112學年度物理系學士班「個人申請」入學第二階段招生考試

【數學試題】

【本考科不可使用計算機】

答案及計算過程請務必寫在試卷本上，並請標明題號， 試題隨卷繳回

1. (8%) 已知二次函數 $f(x)$滿足條件 $f(2-t)=f(-4+t)$，其中t為任意實數，且 $f(2)-f(3)=7$，則 $f(3)-f(5)=$?

2. (8%) 設實係數多項式$f(x)$除以x^2+2x-3的餘式為 6x−5，則$(x+2)\cdot f(x)$除以 x^2+x-2的餘式為何？

3. (8%) 設 $a=2^{32}$, $b=3^{20}$ 且此兩數乘開時有相同位數，請判斷 $a+b$有幾位數 (是否仍維持與 a , b 一致)，並說明你的判斷理由。

4. (8%) 已知數列$< a_n >$滿足關係式

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

請推導出a_n當$n \geq 2$時的一般式，並算出a_{10}。

5. (8%) 在電路中並聯兩個電阻器，其等價電阻的計算公式為$\frac{1}{\mathrm{R}}=\frac{1}{\mathrm{R_1}}+\frac{1}{\mathrm{R_2}}$，其中$R_1, R_2$是個別電阻器的電阻， 而$R$是並聯後的電阻。給定$A, B, C$三個電阻器, 並聯$A, B$得到的等價電阻是 20 歐姆, 又並聯$B, C$得到的等價電阻是 40 歐姆, 並聯$A, C$得到的等價電阻是 24 歐姆,則個別的電阻為何?

6. (10%) 設θ為任意角且 $\tan\theta$有意義，試利用積化和差公式證明:

(1) $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ 及 (2) $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$。

7. (5%) 一 $n \times n$ 矩陣 A 之行列式為 $det(A)$。請問矩陣 cA 之行列式值為何？(c 為一實數係數。)

8. (5%) 已知三條線性聯立方程式 $x+ay-5=0,\ (a-1)x-y+1=0,\ 2ax+y+7=0$ 有 x, y 的唯一解，請問 $a=$？

9. (5%) 令 $z_1=1$，$z_{n+1}=w\,z_n\ (n=1,2,3,\ldots)$，其中 w 是一個絕對值小於 1 的複數。令 $d_n=|z_{n+1}-z_n|$，請問 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n=$？

10. (5%) 令 $f(x) = 2\,sin(x^3) + x^2 2^x$，$g(x) = -2\,cos(x^3) - \frac{1}{sin(x^{-2}2^{-x})}$，求極限 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

11. (10%) 2×2 矩陣 A $= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，（$a$ 為一常數）。已知自然常數（或稱歐拉常數）$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$，請問 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = ?$

12. (10%) 方程式 $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ 定義三維歐式空間中一曲面 S，其通過曲面上一點 p（其座標為 $(x, y, z) = (R, R, -R)$）的切平面 T_p 所滿足的線性方程式為 $ax + by + cz = R$。(1) 請問 $a, b, c = ?$ (2) 請問此切平面 T_p 與曲面 S 之交集為何？

13. (10%) 一箱子內有無限多顆球，球的顏色只可能是黑色、白色、紅色。抽出黑色、白色、紅色球的機率分別是 1/2, 1/4, 1/4。(1) 請問隨機抽出 10 顆球中剛好 8 顆黑色、1 顆白色、1 顆紅色球的機率為何？(2) 若已知抽出的 10 顆球中只有 5 顆黑色，請問剩下的球中剛好有 2 顆白色球（3 顆紅色球）的機率為何？

試題隨卷繳回